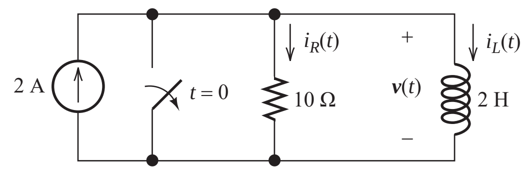


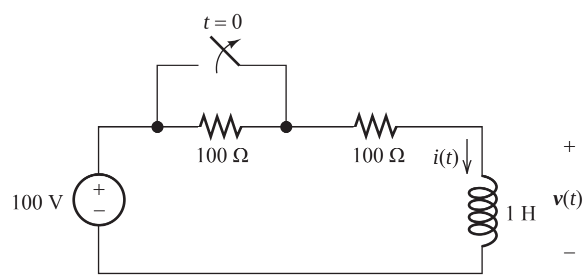
Rys. 4.12. Schemat obwodu do ćwiczenia 4.5

Ćwiczenie 4.6. Rozważmy obwód pokazany na rysunku 4.13. Zakładamy, że przełącznik był zamknięty przez bardzo długi czas poprzedzający chwilę $t = 0$. Znajdź wyrażenia na $i(t)$ oraz $v(t)$.

Odpowiedź:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= 1{,}0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \\
&= 0{,}5 + 0{,}5e^{-t/\tau} \quad \text{dla} \quad t > 0, \\
v(t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \\
&= -100e^{-t/\tau} \quad \text{dla} \quad t > 0,
\end{aligned}
$$

gdzie stała czasowa $\tau = 5$ ms.

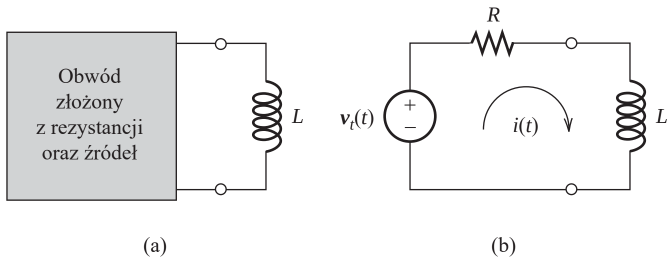


Rys. 4.13. Schemat obwodu do ćwiczenia 4.6

4.4. Obwody *RC* oraz *RL* zasilane źródłami dowolnego kształtu

Po wstępnym zapoznaniu się z obwodami RL i RC przedyskutujemy nieco bardziej ogólnie problemy związane z ich rozwiązywaniem. W tym rozdziale zajmiemy się obwodami, które zawierają jeden element magazynujący energię – albo indukcyjność, albo pojemność.

Rozważmy obwód pokazany na rysunku 4.14(a). Obwód znajdujący się wewnątrz obudowy może składać się z dowolnej kombinacji oporów i źródeł. Pojedyncza indukcyjność L jest wyprowadzona na zewnątrz i pokazana w sposób jawny. Przypomnijmy, że możemy znaleźć obwód zastępczy Thévenina dla obwodów składających się ze źródeł i rezystancji. Równoważnik Thévenina to niezależne źródło napięcia $v_t(t)$ połączone szeregowo z rezystancją Thévenina R. Zatem każdy obwód składający się ze źródeł, rezystancji i jednej indukcyjności można przedstawić za pomocą równoważnego obwodu przedstawionego na rysunku 4.14(b). (Oczywiście w podobny sposób można zredukować dowolny obwód zawierający źródła, rezystancje i pojedynczą pojemność).



Rys. 4.14. Obwód (liniowy – przyp. tłum.) złożony z rezystancji i źródeł oraz jego schemat zastępczy składający się z szeregowego połączenia źródła napięcia i rezystancji połączone z jedną indukcyjnością.

Zapisując równanie według II prawa Kirchhoffa dla obwodu z rysunku 4.14(b), otrzymujemy

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = v_t(t). \tag{4.37}$$

Po podzieleniu stronami przez rezystancję, otrzymamy

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i(t) = \frac{v_t(t)}{R}. \tag{4.38}$$

Ogólnie rzecz biorąc, równanie dla dowolnego obwodu zawierającego jedną indukcyjność lub jedną pojemność można zapisać w postaci

$$\tau\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t) = f(t), \tag{4.39}$$

gdzie $x(t)$ reprezentuje prąd bądź napięcie, które chcemy wyznaczyć. W kolejnym kroku, szukamy rozwiązania równania (4.39), które spełnia warunki początkowe (takie jak np. prąd początkowy płynący przez cewkę indukcyjną).

Stała τ (która w tym przypadku jest stałą czasową) zależy tylko od rezystancji oraz indukcyjności (lub pojemności). Źródła są reprezentowane funkcją $f(t)$, którą będziemy nazywali **funkcją wymuszającą**. Jeśli w naszym obwodzie nie ma źródeł (jak np. w obwodzie z rysunku 4.1), to funkcja wymuszająca jest równa zeru. Dla źródeł stałoprądowych, funkcja wymuszająca jest stałą.

Równanie (4.39) nazywamy równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, ponieważ pochodna najwyższego rzędu jest pierwszego rzędu. Jest to równanie liniowe, ponieważ nie zawiera potęg ani innych nieliniowych funkcji $x(t)$ lub jej pochodnych. Zatem, aby rozwiązać obwód *RL* (lub *RC*), musimy znaleźć ogólne rozwiązanie liniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu o stałych współczynnikach.

Rozwiązanie równania różniczkowego

Z ważnego twierdzenia z dziedziny równań różniczkowych wynika, że ogólne rozwiązanie równania (4.39) składa się z dwóch części. Pierwsza część nazywana jest

Ogólne rozwiązanie równania (4.39) składa się z dwóch części.

rozwiązaniem szczególnym $x_p(t)$ i jest to dowolne wyrażenie spełniające równanie (4.39). Zatem,

Rozwiązanie ogólne (nazywane również wymuszoną odpowiedzią) jest to dowolne wyrażenie spełniające równanie.

$$\tau \frac{dx_p(t)}{dt} + x_p(t) = f(t). \tag{4.40}$$

Rozwiązanie szczególne jest również nazywane **wymuszoną odpowiedzią**, ponieważ zależy od funkcji wymuszającej (która z kolei wynika z niezależnych źródeł).

Aby otrzymać rozwiązanie, które spełnia warunki początkowe, musimy do rozwiązania szczególnego dodać rozwiązanie ogólne.

Nawet jeśli dane rozwiązanie spełnia równanie różniczkowe, może nie być zgodne z warunkami początkowymi, takimi jak początkowe napięcie na kondensatorze lub natężenie prądu w indukcyjności. Dodając kolejny człon, znany jako rozwiązanie ogólne (uzupełniające), otrzymujemy rozwiązanie, które spełnia zarówno równanie różniczkowe, jak i warunki początkowe.

W przypadku funkcji wymuszających, z którymi będziemy mieli do czynienia, często możemy wybrać postać rozwiązania ogólnego na podstawie analizy funkcji. Zazwyczaj rozwiązanie ogólne zawiera człony o takich samych postaciach funkcyjnych jak człony występujące w funkcji wymuszającej i jej pochodnych.

Sinusoidalne funkcje czasu są jednym z najważniejszych rodzajów funkcji wymuszających występujących w elektrotechnice. Na przykład, rozważmy funkcję wymuszającą postaci

$$f(t) = 10\cos(200t).$$

Ponieważ pochodne funkcji sinus i cosinus są również funkcjami sinus i cosinus, spróbujemy znaleźć rozwiązanie ogólne w postaci

$$x_p(t) = A\cos(200t) + B\sin(200t),$$

gdzie A i B są stałymi, które należy wyznaczyć. Wartości tych stałych można wyliczyć przez podstawienie proponowanego rozwiązania ogólnego do równania różniczkowego i porównanie obu stron równania. W ten sposób uzyskamy równania, na podstawie których wyznaczymy wartości A i B. (W rozdziale 5 omówimy skrócone metody rozwiązywania wymuszonej odpowiedzi obwodów ze źródłami sinusoidalnymi).

Równanie jednorodne otrzymujemy przez podstawienie za funkcję wymuszającą zera.

Druga część rozwiązania ogólnego jest nazywana **rozwiązaniem komplementarnym** $x_c(t)$ i jest to rozwiązanie **równania jednorodnego**

$$\tau \frac{dx_c(t)}{dt} + x_c(t) = 0. \tag{4.41}$$

Rozwiązanie komplementarne (również nazywane naturalną odpowiedzią) otrzymujemy rozwiązując równanie jednorodne.

Równanie jednorodne otrzymujemy przez podstawienie za funkcję wymuszającą zera. Zatem, postać rozwiązania komplementarnego nie zależy od źródeł. To rozwiązanie jest również nazywane **odpowiedzią naturalną**, ponieważ zależy od elementów pasywnych obwodu. Rozwiązanie komplementarne trzeba dodać do rozwiązania szczególnego, ażeby otrzymać całkowite (pełne) rozwiązanie spełniające wartości początkowe prądów oraz napięć.

Równanie jednorodne możemy przekształcić do postaci

$$\frac{dx_c(t)/dt}{x_c(t)} = \frac{-1}{\tau}. \tag{4.42}$$

Po obustronnym scałkowaniu równania (4.42), dostajemy

$$\ln\left[x_c(t)\right] = \frac{-t}{\tau} + c, \tag{4.43}$$

gdzie c jest stałą całkowania. Równanie (4.43) jest równoważne

$$x_c(t) = e^{(-t/\tau+c)} = e^c e^{-t/\tau}.$$

Następnie, jeśli zdefiniujemy stałą K jako $K = e^c$, to rozwiązanie komplementarne przyjmie postać

$$\boxed{x_c(t) = Ke^{-t/\tau}.} \tag{4.44}$$

Metoda rozwiązywania krok po kroku

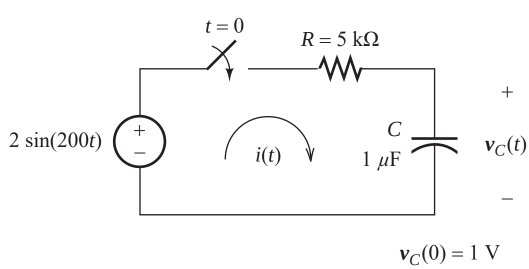
Poniżej podsumowano kolejne etapy analizy obwodów składających się z rezystancji, źródła oraz cewki indukcyjnej (lub kondensatora):

1. Napisz równanie obwodu i zredukuj je w taki sposób, by uzyskać równanie różniczkowe pierwszego rzędu.
2. Znajdź rozwiązanie ogólne. Szczegóły związane z wykonaniem tej operacji zależą od postaci funkcji wymuszającej. Na przykładach, w ćwiczeniach oraz dodatkowych zadaniach przedstawiliśmy kilkanaście rodzajów funkcji wymuszających.
3. Wyznacz całkowite rozwiązanie przez dodanie do rozwiązania szczególnego rozwiązania komplementarnego, które jest dane równaniem (4.44). Równanie to zawiera dowolną stałą K.
4. Skorzystaj z warunków początkowych, by wyznaczyć wartość stałej K.

Całą powyższą procedurę zilustrujemy przykładem.

Przykład 4.6. **Analiza stanu nieustalonego w obwodzie *RC* ze źródłem sinusoidalnym**

Oblicz prąd w obwodzie przedstawionym na rysunku 4.15. Kondensator jest początkowo naładowany do napięcia $v_C(0+) = 1$ V.



Rys. 4.15. Obwód pierwszego rzędu ze źródłem sinusoidalnie zmiennym. Patrz przykład 4.6

Rozwiązanie

Na początek zapiszemy równanie napięciowe dla $t > 0$. Poruszając się zgodnie ze wskazówkami zegara po oczku i dodając kolejne napięcia, otrzymamy

Krok 1: Napisz równanie obwodu i zredukuj je w taki sposób, by uzyskać równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t + v_C(t) - 2\sin(200t) = 0.$$